CAPLP 3ème concours

Mathématiques - Sciences Physiques
session 2004

composition de mathématiques

Enoncé

http ://perso.wanadoo.fr/megamaths/

0451-A

2C61-20
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2004

CA/PLP

TROISIÈME CONCOURS

Rue de la
97162 POINTE-A-PITRE CEDEX

Section : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices de poche est autorisé
(conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème :

- *Le premier exercice porte sur l'étude d'une figure plane par les nombres complexes.*
- *Le deuxième exercice est l'étude d'un solide de l'espace.*
- *L'objet du problème est de modéliser de deux façons différentes l'évolution d'une population de bactéries.*

***NOTE IMPORTANTE** : la sixième page de ce sujet est à rendre avec la copie.*

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction, interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + 2\,i$, $b = 3 + i$ et $c = 1 + i$.

1) **a)** Placer les points A, B et C sur une figure.

b) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2) On appelle r la rotation de centre A telle que r (B) = C.

a) Justifier qu'une mesure de l'angle de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$.

b) Calculer l'affixe d du point D = r (C). Placer le point D sur la figure.

c) Quelle est la position relative des points A, B et D ?

d) Soit Γ le cercle de diamètre [BC]. Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3) Soit M d'affixe z un point de Γ et M' d'affixe z' son image par r.

a) Justifier qu'il existe un réel θ appartenant à $[\,0\,;\,2\,\pi\,[$ tel que $z = 2 + i + e^{i\theta}$. Donner les valeurs de θ correspondant aux points A, B et C.

b) Exprimer z' en fonction de θ.

c) Pour $\theta \neq \pi$, montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés. Que se passe–t–il pour $\theta = \pi$?

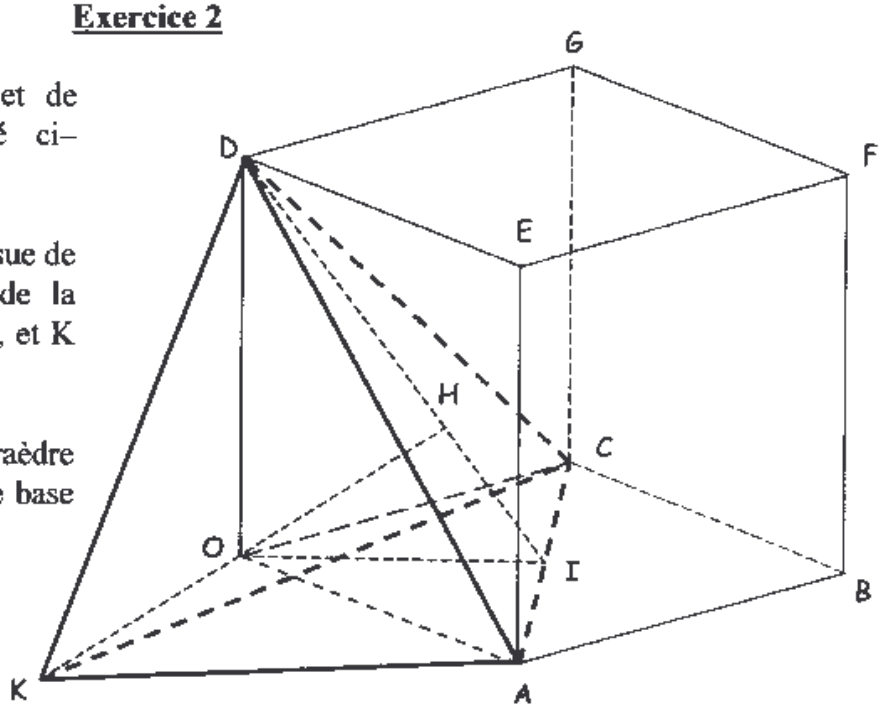
d) Placer sur la figure le point M d'affixe $2 + i + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

Exercice 2

On considère le cube d'arête 1 et de sommets OABCDEFG représenté ci–contre.

On appelle I le pied de la hauteur issue de D du triangle ACD, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OID, et K le symétrique de H par rapport à O.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur associée à cette base.



1) a) Calculer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre OACD.

b) Quelle est la nature du triangle ACD ?

c) Représenter en vraie grandeur sur une même figure les triangles OAC et ACD (unité graphique 5 cm), puis calculer l'aire $\mathscr{S}$ du triangle ACD.

d) Exprimer OH en fonction de $\mathscr{V}$ et de $\mathscr{S}$ et en déduire que $OH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les droites (OH) et (AC) sont orthogonales.

b) Justifier que la droite (OH) est orthogonale au plan (ACD), puis que H est l'orthocentre du triangle ACD.

3) On munit l'espace du repère orthonormal $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

a) Dans le repère considéré, exprimer les coordonnées des sommets du cube et du point I.

b) Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. En déduire les coordonnées du point K. Quelle est la position relative des points O, H et F ?

c) Donner une équation du plan (ACD) et retrouver ainsi la longueur OH.

d) Démontrer que le tétraèdre KACD est régulier (c'est à dire que toutes ses arêtes ont la même longueur).

e) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre KACD. Calculer les coordonnées de Ω (on pourra d'abord justifier que Ω est un point de la droite (OH), puis utiliser les points A et K).

f) Quelle est la position relative des points O, H et Ω ?

Problème

L'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture a été mesurée expérimentalement. L'objet de ce problème est de modéliser cette évolution au moyen d'une fonction dérivable. Pour cela, la partie A propose un modèle d'évolution très simple, et la partie B un modèle plus raffiné. Les deux parties ne sont pas indépendantes, en particulier les notations sont les mêmes dans tout le problème.

Le nombre de bactéries est exprimé en millions d'individus, le temps t est exprimé en heures. On considère donc dans tout le problème que t est un réel de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

On appelle N_0 (réel strictement positif) le nombre de bactéries, introduites dans le milieu de culture à l'instant $t = 0$.

On appelle vitesse d'accroissement des bactéries la dérivée par rapport au temps du nombre de bactéries.

Partie A – Modèle exponentiel

Dans ce modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t, et on considère que, dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' = ay$, où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales.

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1), avec la condition initiale $f(0) = N_0$.
2) On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que T est indépendant de l'instant de départ considéré, puis que, pour tout réel t positif, on a : $f(t) = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$.
3) Le tableau présenté en annexe 1 (voir page 6) fournit les valeurs expérimentales obtenues sur une durée de 6 heures. Les points correspondants sont représentés sur le graphique de l'annexe 2.
   a) En utilisant les valeurs expérimentales mesurées aux temps 0 et 0,5 heures, déterminer les valeurs de N_0 et T et vérifier que $a = 2\ln(2)$.
   b) Tracer, sur la feuille fournie en annexe 2, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.
   c) Calculer le nombre de bactéries prédit par le modèle pour un temps de 6 heures et le comparer à celui fourni par l'expérience. Que constate–t–on ? Dans quelles conditions ce premier modèle vous semble–t–il adapté aux observations expérimentales ?

Partie B – Modèle à population limitée

Dans ce modèle, on note $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t. On constate que, le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment. Pour tenir compte de cette observation, on introduit un facteur limitant dans l'équation différentielle précédente, et on considère que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' = a\,y\left(1 - \frac{y}{M}\right)$, où M est une constante strictement supérieure à N_0 dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1) Résolution de l'équation (E_2)

a) Démontrer que g est une solution strictement positive de (E_2) si et seulement si la fonction $h = \frac{1}{g}$ est une solution strictement positive de (E_2') : $y' + a\,y = \frac{a}{M}$

b) Résoudre (E_2').

c) En déduire que la solution de l'équation différentielle (E_2) avec la condition initiale $g(0) = N_0$, s'écrit $g(t) = \dfrac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-at}}$

Dans la suite du problème, on pose $C = \frac{M - N_0}{N_0}$ et on a alors : $g(t) = \dfrac{M}{1 + C\,e^{-at}}$

2) Etude de la fonction g.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction g.

b) Démontrer que, pour tout réel t positif ou nul, on a : $0 < g(t) < M$. Que représente M ?

c) Etudier le sens de variation de g.

d) Démontrer qu'il existe un unique réel t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$. Exprimer t_0 en fonction de a et de C.

e) Démontrer que $g'' = a\left(1 - \frac{2g}{M}\right)g'$. Etudier le signe de g''. En déduire les variations de la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries.

f) Calculer le nombre moyen m_0 de bactéries prédit par le modèle g entre les instants 0 et $2\,t_0$ en fonction de M.

3) Interprétation graphique.

Dans cette question, on utilise les valeurs de N_0, T et a déterminées dans la partie A. On prend de plus : $M = 100\,N_0$.

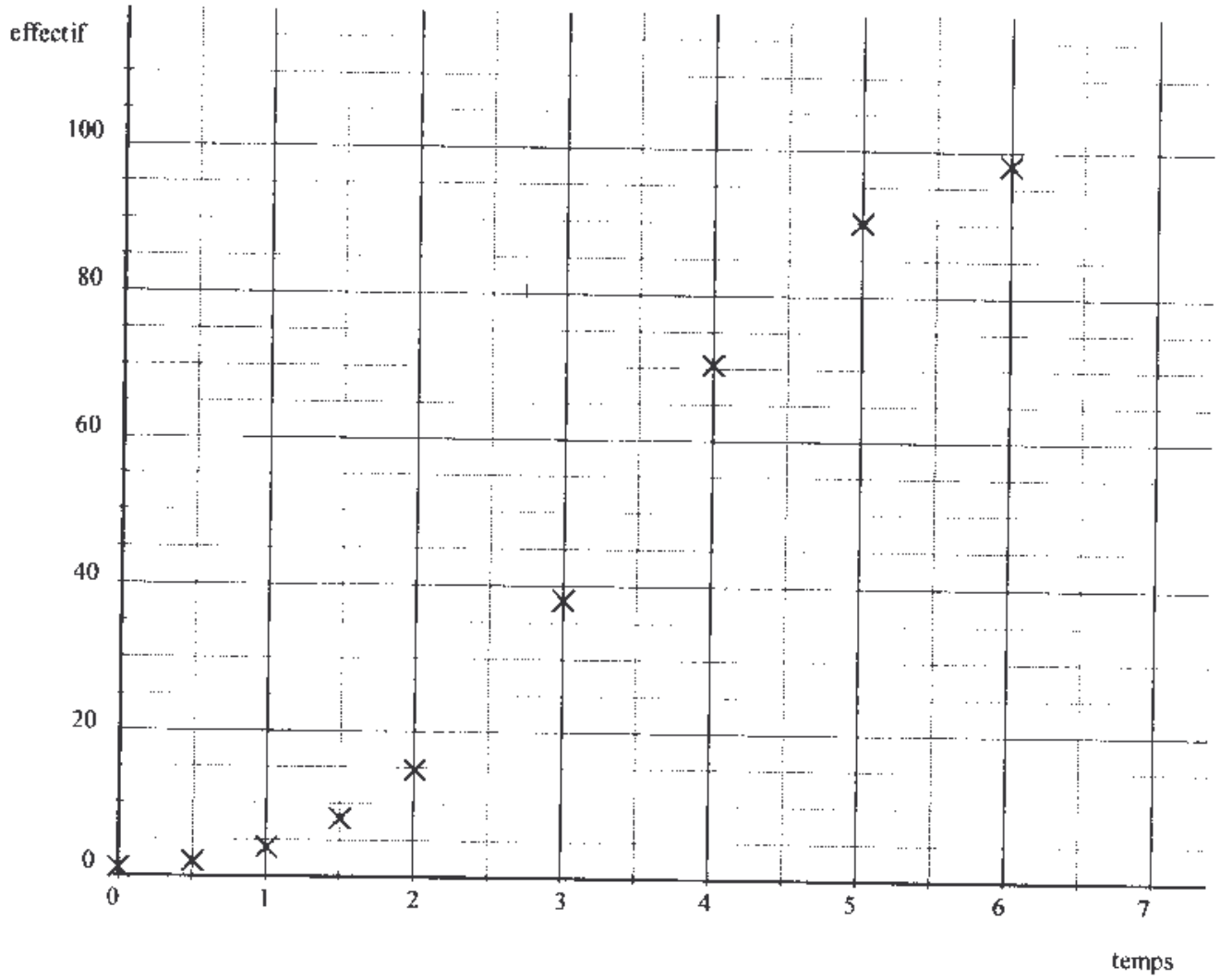
a) Justifier brièvement ce dernier choix, puis démontrer que, pour tout réel t positif ou nul, on a : $g(t) = \dfrac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}$

b) Tracer, sur la feuille fournie en annexe 2 et à rendre avec la copie, la courbe Γ représentative de la fonction g. On représentera l'asymptote Δ de cette courbe ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0. Quelle est la nature de ce point ?

c) Que peut–on conjecturer à partir de cette représentation ? Quel calcul pourrait–on effectuer afin de valider cette conjecture ?

FEUILLE À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe 1

t (en heures)	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6
nombre de bactéries (en millions)	1.0	2.0	3.9	7.9	14.5	37.9	70.4	90.1	98

Annexe 2